

Studien über den Holditchschen Satz

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Rudolf Thüring

aus Basel und Ettingen (Baselland)

Basel 1952

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.

Studien über den Holditchschen Satz

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Rudolf Thüring

aus Basel und Ettingen (Baseland)

Basel 1952

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie. AG.

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. OSTROWSKI
und Dr. A. SPEISER.

Basel, den 5. Februar 1952

Prof. Dr. W. Kuhn, Dekan



Sonderabdruck aus den
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel
Band 63, Nr. 2, 1952

Studien über den Holditchschen Satz

Mit 26 Abbildungen

Von R. Thüring

Einleitung

1. Kehrt eine in der Ebene stetig bewegliche Gerade von einer festgewählten Anfangslage ausgehend punktweise in diese zurück, so seien die von drei Punkten A, B, C der Geraden beschriebenen Kurven bzw. R_A, R_B, R_C und die umschriebenen Flächeninhalte bzw. $(A), (B), (C)$ ¹⁾. Ist ϑ der Winkel zwischen einer festen Richtung und der Richtung $\overrightarrow{AB}$, so ist für eine derart geschlossene Bewegung $\int d\vartheta = 2n\pi$ (n ganz).

Auf der Geraden sei die Richtung $\overrightarrow{AB}$ als positiv erklärt. Ist ferner

$$(\xi, \eta) = \varepsilon |\xi \eta|, \quad (\xi = A, B, C; \eta = A, B, C)$$

wobei $|\xi \eta|$ die Länge der Strecke von ξ nach η und $\varepsilon = +1$ bzw. $= -1$ ist, je nachdem die Richtungen $\overrightarrow{\xi\eta}$ und $\overrightarrow{AB}$ übereinstimmen bzw. entgegengesetzt sind, so gilt der bemerkenswerte Satz:

$$\begin{aligned} (A)(B, C) + (B)(C, A) + (C)(A, B) \\ + n\pi(A, B)(B, C)(C, A) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(vgl. GOURSAT, 1910, p. 277 ff.).

2. Die ersten Ansätze zu dieser Formel gehen auf HOLDITCH („Petrarch“, 1858, p. 65) zurück. Er stellt den speziellen Fall, wo $R_A = R_B$ eine Ellipse ist, als Aufgabe mit der Andeutung, dass die Ellipse durch eine andere Kurve ersetzt werden kann. Die Herleitung von (1) für beliebige Kurven R_A, R_B und für $n = 0$ und $n = 1$ ist von WOOLHOUSE (1858, p. 96; vgl. auch

¹⁾ Dabei ist jeder Flächeninhalt gemäss dem Umlaufsinn des entsprechenden Punktes positiv oder negativ zu nehmen. Im Falle von Überschneidungen ist jedes geschlossene, doppelpunktfreie Teilstück der Menge $R_A + R_B + R_C$ mit dem zugehörigen Vorzeichen zu versehen.

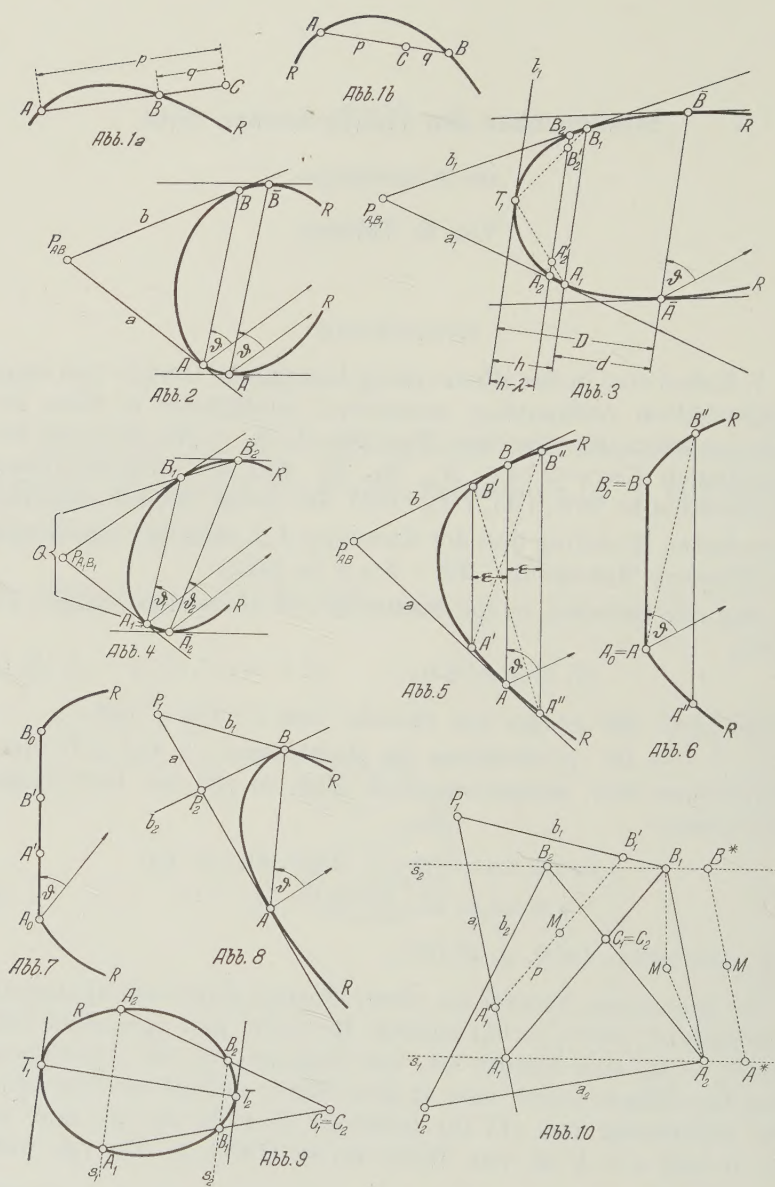


Abb. 1-10.

WILLIAMSON, 1877, p. 208) als Lösung zur Holditchschen Aufgabe gegeben worden. Der erste Hinweis zur Verallgemeinerung für $n > 1$ stammt wahrscheinlich von KEMPE (1878, p. 165).

Ziel unserer Arbeit ist eine etwas nähere Betrachtung des Spezialfalles der Formel (1), wo $R_A = R_B = R$ ein *Oval*, das heisst eine geschlossene doppelpunktfreie konvexe ebene Kurve, und $n = 1$ ist. Diesen Fall werden wir in der Folge als die *Holditchsche Bewegung* bezeichnen.

3. Setzen wir voraus, dass die Punkte A und B dasselbe Oval R einmal im positiven Sinne durchlaufen, so ist $(A) = (B)$. Je nachdem C auf der Verlängerung von AB über B hinaus oder zwischen A und B liegt, setzen wir in (1) (vgl. Abb. 1a und 1b)

$$(A, B) = p - q, \quad (B, C) = q, \quad (C, A) = -p, \quad n = 1 \text{ bzw.}$$

$$(A, B) = p + q, \quad (B, C) = -q, \quad (C, A) = -p, \quad n = 1$$

ein, das heisst wenn wir C als Ursprung wählen, so sind die Koordinaten von A und B im ersten Falle $-p$ und $-q$, im zweiten Falle $-p$ und $+q$. Somit wird (1) zu

$$(C) - (A) = p q \pi \quad \text{bzw.} \quad (A) - (C) = p q \pi. \quad (1')$$

4. Der Zentralsatz unserer Arbeit ist der Satz 1, p. 229. Bei unserer Holditchschen Bewegung ist nämlich die gemeinsame Bahnkurve der Punkte A und B von vornherein vorgegeben. Daher wird nicht jede Sehne AB konstanter Länge $|AB| = L$ ohne weiteres auf R vollständig herumgeführt werden können. In § 1 (Satz 1, p. 229) leiten wir nun eine *hinreichende* und eine *notwendige* Bedingung für die Existenz der Holditchschen Bewegung her: L darf nicht oberhalb der „Minimalbreite“ Δ (vgl. Nr. 11, p. 226) von R liegen, und es genügt, wenn L unterhalb Δ liegt.

5. Dabei brauchen übrigens die Punkte A und B sich längs R gar nicht durchwegs monoton zu bewegen. Es ist noch möglich, dass für $|AB| = L < \Delta$ einigen Richtungen eine ganze Schar von Sehnenlagen entsprechen, indem nämlich die Sehne der Länge L längs eines geradlinigen Randstückes von R der Länge $> L$ gleitet. In Satz 2 (§ 2, p. 230) werden wir beweisen, dass für $L < \Delta$ eine derartige Randstrecke den einzigen Ausnahmefall der *Eindeutigkeit* bildet. Wir nennen dabei unsere Sehnenebewegung dann und nur dann eindeutig, wenn jeder Richtung eine und nur eine Sehnenlage entspricht.

6. Auch im Falle der „eindeutigen“ Bewegung entspricht die betrachtete Konfiguration noch nicht dem landläufig anschaulichen Bild derselben, da die Kurve R_C (vgl. Nr. 1, p. 221) an sich

auch *Selbstüberschneidungen* haben könnte [vgl. Beispiel b), p. 247]. In § 3 stellen wir *hinreichende* Bedingungen für die Doppelpunktfreiheit von R_C auf. Liegt C *ausserhalb* der Strecke AB , so genügt $L < \Delta$. Liegt dagegen C *zwischen* A und B , so läuft unsere *hinreichende* Bedingung darauf hinaus, dass L kleiner ist als der *maximale Durchmesser* $2r$ eines *Inkreises* von R . Dabei verstehen wir unter einem Inkreis von R jeden Kreis, der nicht durch das Äussere von R geht.

7. Im Falle eines *stetig gekrümmten Ovals* mit nur *vier Scheiteln* ist allerdings $\Delta = 2r$ (vgl. zum Beweise ZINDLER, 1920, p. 89ff., Satz 4 und Satz 11 mit Zusatz), so dass unter der Voraussetzung des Satzes 1 ($L < \Delta$) die Doppelpunktfreiheit von R_C gesichert ist. Da man zumeist zur Illustration des Holditchschen Satzes ein vierscheitliges Oval, zum Beispiel eine Ellipse, wählt, wird man dabei auf die Möglichkeit der Doppelpunkte nicht ohne weiteres aufmerksam.

8. Auch im Falle der „doppelpunktfreien“ Bewegung braucht diese noch nicht in dem Sinne monoton zu sein, dass die von den Punkten A und B beschriebenen Bogenlängen im *eigentlichen Sinne monoton* wachsen ohne stationäre Punkte oder rückläufige Bewegungen. Wachsen nun die von A und B beschriebenen Bogenlängen eigentlich monoton, so nennen wir die Bewegung unserer Sehne *monoton*.

Für die *Monotonie* stellen wir in § 4 eine *hinreichende* und eine *notwendige* Bedingung auf. Es genügt, dass L unterhalb der unteren Grenze N_u der „Normallängen“ bleibt, und es ist notwendig, dass $L \leq N_u$ ist. Wir definieren die Grösse N_u in § 4, Nr. 20, p. 234.

Diese Monotoniebedingung ist von der obigen Bedingung für die Doppelpunktfreiheit der Kurve R_C unabhängig, da N_u sowohl kleiner als auch grösser als $2r$ sein kann [so ist zum Beispiel bei den Kurven konstanter Breite stets $2r < N_u = \Delta^1$), während beim gleichseitigen Dreieck und bei einer Ellipse mit $a > b\sqrt{2}$ stets $2r > N_u$ gilt; vgl. Nr. 44, p. 249]. Dagegen gilt auf jeden Fall $2r \leq \Delta \leq 3r$ (vgl. zum Beweise BLASCHKE, 1914, p. 369ff.).

Für N_u gilt die Ungleichung $\Delta \geq N_u \geq 0$. Der Wert 0 wird zum Beispiel beim gleichseitigen Dreieck angenommen, der Wert Δ zum Beispiel bei einer Ellipse mit $a \leq b\sqrt{2}$ (vgl. Nr. 44, p. 248) oder aber bei allen Kurven konstanter Breite (vgl. BONNESEN & FENCHEL, 1934, p. 127).

¹⁾ Denn da hier jede Normale von R zugleich Doppelnormale ist, gilt $N_u = \Delta$, andererseits ist $2r < \Delta$, vgl. BONNESEN & FENCHEL, 1934, p. 127.

Den Fall $L = N_u$ werden wir nur für *stetig gekrümmte* Ovale mit $N_u < 4$, deren geradlinige Randstücke alle $\leq N_u$ sind, betrachten (Satz 9, p. 241).

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass die kinematische Konfiguration des Satzes von HOLDITCH dann dem landläufig anschaulichen Bilde entspricht, wenn die Länge L der Sehne sowohl *unterhalb des maximalen Inkreisdurchmessers* $2r$ als auch *unterhalb der unteren Grenze* N_u der Normallängen liegt.

Allerdings könnte man zu diesem anschaulichen Bilde auch noch die *Konvexität* der Kurve R_C zählen. Die Frage nach den Konvexitätsbedingungen wird in dieser Arbeit, abgesehen von zwei Spezialfällen, nicht entschieden.

9. In § 5 betrachten wir speziell *Ovale mit durchwegs stetiger Krümmung*. Unter dieser Annahme geben wir eine weitere *hinreichende* Bedingung für die Doppelpunktfreiheit von R_C , in der der *maximale* und der *minimale Krümmungskreis* von R vorkommen und C als *zwischen* A und B gelegen angenommen wird (Satz 11, p. 244). Ferner beweisen wir in diesem Zusammenhang einen wohl auch an sich interessanten Satz über stetig gekrümmte Ovale (Satz 10, p. 243).

10. In § 6 diskutieren wir einige Beispiele. R wird dabei: a) als gleichseitiges Dreieck, b) als die Reuleauxsche Kurve konstanter Breite, c) als eine Ellipse und d) als eine Parabel angenommen.

In den Beispielen a) und c) wird vor allem die Eindeutigkeit diskutiert. Daneben beschäftigen wir uns in c) ausführlich mit der Frage nach der Monotonie und der Doppelpunktfreiheit von R_C . Zur letzten Frage geben wir noch in a) und b) einige Beiträge, während in c) und d) noch einiges Material zur Frage der Konvexität von R_C beigebracht wird.

Die vorliegende Arbeit ist unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI entstanden. Für die vielseitige Unterstützung, die mir von meinem hochverehrten Lehrer gegeben wurde, möchte ich meinen herzlichsten Dank aussprechen.

§ 1. Die Existenz der Holditchschen Bewegung

11. Punkte auf R werden im folgenden mit A, B bezeichnet, die entsprechenden Stützgeraden mit a, b . Den Schnittpunkt der Stützgeraden a und b nennen wir den „Pol“ P_{AB} der Sehne AB .

Als eine ϑ -*Sehne* bezeichnen wir irgendeine Sehne von R , die mit einer fest vorgegebenen Richtung den Winkel ϑ einschliesst.

Als eine ϑ -Nebensehne bezeichnen wir irgendeine ϑ -Sehne von R , durch deren Endpunkte keine parallelen Stützgeraden existieren. Auch eine Randstrecke der Richtung ϑ wird als eine ϑ -Nebensehne bezeichnet, wenn durch ihre beiden Endpunkte keine parallelen (natürlich von der Verbindungsgeraden verschiedenen) Stützgeraden existieren.

Als eine ϑ -Hauptsehne bezeichnen wir irgendeine ϑ -Sehne von R , durch deren Endpunkte zueinander parallele Stützgeraden existieren, wobei wiederum bei einer Randstrecke die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte in diesem Falle von den möglichen Stützgeraden ausgeschlossen wird. Man überzeugt sich leicht, dass es in jeder Richtung wenigstens eine Hauptsehne gibt (zum Beweise vgl. BONNESEN & FENCHEL, 1934, p. 51).

Δ sei die Minimalbreite von R , das heisst der Minimalabstand zweier parallelen Stützgeraden von R . Unter einer Breitensehne von R verstehen wir eine Hauptsehne, deren Länge gleich der Minimalbreite Δ von R ist. Sie steht bekanntlich in ihren Endpunkten senkrecht auf den (eventuell geeignet gewählten) Stützgeraden (zum Beweise vgl. BONNESEN & FENCHEL, 1934, p. 51).

Eine ϑ -Sehne AB , die auf R unter Beibehaltung der Länge $|AB| = L$ in eine ϑ' -Sehne bzw. in eine ϑ'' -Sehne ($\vartheta'' < \vartheta < \vartheta'$) derart übergeführt werden kann, dass die von den Punkten A und B auf R beschriebenen Bogenlängen $s(A)$ und $s(B)$ (gemessen von irgendeinem auf R festgewählten Punkte aus) sich stetig ändern und ϑ eigentlich monoton und stetig von ϑ bis ϑ' wächst bzw. von ϑ bis ϑ'' fällt, nennen wir eine ϑ_+ -Sehne bzw. eine ϑ_- -Sehne.

Ist AB sowohl ϑ_+ - als auch ϑ_- -Sehne, so bezeichnen wir AB als eine $\vartheta_{\pm}$ -Sehne.

Zwei Sehnen von R nennen wir im folgenden dann und nur dann parallel, wenn sie mit der vorgegebenen Richtung denselben Winkel einschliessen und *gleichgerichtet* sind.

12. Mit diesen Bezeichnungen erschliesst man aus der Konvexität von R leicht folgende

Eigenschaften der ϑ -Sehnen

a) Jede ϑ -Nebensehne AB ist kürzer als die ϑ -Hauptsehnen.

Beweis. Die parallelen Stützgeraden in den Endpunkten einer ϑ -Hauptsehne $\overline{AB}$ spannen einen Parallelstreifen auf, in dem das Oval R ganz enthalten ist (vgl. Abb. 2).

b) Liegt ein Pol P_{AB} einer ϑ -Nebensehne AB rechts bzw. links von $\overrightarrow{AB}$, so liegt $\overrightarrow{AB}$ auch rechts bzw. links der zu $\overrightarrow{AB}$ parallelen Hauptsehnen $\overrightarrow{AB}$.

Beweis. P_{AB} liege links von $\overrightarrow{AB}$ (vgl. Abb. 2). Die Endpunkte jeder ϑ -Nebensehne links von $\overrightarrow{AB}$ können auf Grund der Konvexität von R nur innerhalb oder auf dem Rande des Dreiecks ABP_{AB} liegen. Daher ist jede derartige Sehne kürzer als die Sehne AB , kann also nach a) keine Hauptsehne sein. Analog schliesst man, wenn P_{AB} rechts von $\overrightarrow{AB}$ liegt.

c) Liegt eine ϑ -Nebensehne $\overrightarrow{AB}$, die nicht Randstück von R ist, rechts bzw. links einer ϑ -Hauptsehne $\overrightarrow{AB}$, so liegt jeder Pol P_{AB} rechts bzw. links von $\overrightarrow{AB}$.

Beweis. $\overrightarrow{AB}$ liege links einer parallelen Hauptsehne $\overrightarrow{AB}$ (vgl. Abb. 2). Läge nun P_{AB} rechts von $\overrightarrow{AB}$, so müsste $\overrightarrow{AB}$ nach b) auch rechts von $\overrightarrow{AB}$ liegen, im Widerspruch zur Voraussetzung. Da aber P_{AB} auch nicht auf AB liegen kann (AB ist nach Voraussetzung nicht Randstück von R), folgt daraus die Behauptung.

d) Die Sehnenlänge einer ϑ -Nebensehne ist, wenn wir die Gesamtheit der ϑ -Nebensehnen auf einer festen Seite aller ϑ -Hauptsehnen betrachten, eine stetige, eigentlich monoton abnehmende Funktion ihres Abstandes von einer festgewählten ϑ -Hauptsehne.

Beweis. $\overrightarrow{AB}$ liege links von $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AB}$, vgl. Abb. 2). Da nach c) der Pol P_{AB} somit links von $\overrightarrow{AB}$ liegt, ist jede ϑ -Nebensehne links von $\overrightarrow{AB}$, da ja ihre Endpunkte nur im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks ABP_{AB} liegen können, kürzer als AB , woraus die eigentliche *Monotonie* folgt.

Um nun die *Stetigkeit* zu beweisen, zeichnen wir in Abb. 3 links einer ϑ -Hauptsehne $\overrightarrow{AB}$ eine parallele ϑ -Nebensehne $\overrightarrow{A_1B_1}$ und die zu $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A_1B_1}$ parallele Stützgerade t_1 von R links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ mit einem Stützpunkt T_1 .

Der Abstand der Hauptsehne $\overrightarrow{AB}$ bzw. der Nebensehne A_1B_1 vom Punkte T_1 sei D bzw. h , der Abstand von A_1B_1 von $\overrightarrow{AB}$ sei d . Um nun zu zeigen, dass die Länge der Sehne A_1B_1 sich bei seitlichen Parallelverschiebungen stetig ändert, betrachten wir eine

zu $\overrightarrow{A_1B_1}$ benachbarte parallele ϑ -Nebensehne $\overrightarrow{A_2B_2}$ mit dem Abstand $h - \lambda$ von T_1 und setzen

$$|A_1B_1| = L_1, \quad |A_2B_2| = L_2.$$

Es sei zunächst $\lambda > 0$. Aus Abb. 3 ersieht man, wenn wir die Strecken T_1A_1 und T_1B_1 , die auf Grund der Konvexität von R nicht durch das Äussere von R gehen, zeichnen und ihre Schnittpunkte mit A_2B_2 bzw. mit A_2' und B_2' bezeichnen:

$$\frac{|A_2'B_2'|}{L_1} = \frac{h-\lambda}{h}.$$

Daraus folgt aber sofort

$$L_1 - |A_2'B_2'| = L_1 \frac{\lambda}{h} = L_1 \frac{\lambda}{D-d},$$

so dass die linke Seite, und wegen $L_1 > L_2 \geq |A_2'B_2'|$ auch $L_1 - L_2$, mit λ gegen 0 konvergiert. Dies gilt aber auch für $\lambda < 0$, weil in diesem Falle $|A_2'B_2'| \geq L_2 > L_1$ gilt, womit d) bewiesen ist.

e) Liegen beide Endpunkte A_1, B_1 einer ϑ_1 -Nebensehne rechts bzw. links einer ϑ_2 -Hauptsehne $\overrightarrow{A_2B_2}$ derart, dass der Schnittpunkt Q der beiden Geraden $A_1\overrightarrow{A_2}$ und $B_1\overrightarrow{B_2}$ auch rechts bzw. links der Sehne $\overrightarrow{A_1B_1}$ liegt, so liegt $\overrightarrow{A_1B_1}$ (sowohl für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ als auch für $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$) rechts bzw. links der zu $\overrightarrow{A_1B_1}$ parallelen ϑ_1 -Hauptsehnen (vgl. Abb. 4).

Diese Aussage gilt auch dann, wenn einer der beiden Sehnenendpunkte A_1 bzw. B_1 der ϑ_1 -Nebensehne A_1B_1 mit dem Endpunkt $\overline{A_2}$ bzw. B_2 der ϑ_2 -Hauptsehne zusammenfällt. Die Gerade $A_1\overline{A_2}$ bzw. $B_1\overline{B_2}$ in der Voraussetzung ist dabei durch irgendeine Stützgerade durch $\overline{A_2}$ bzw. $\overline{B_2}$ zu ersetzen.

Beweis. $\overrightarrow{A_1B_1}$ liege links von $\overrightarrow{A_2B_2}$ derart, dass Q links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ liegt (vgl. Abb. 4). Da die Geraden $A_1\overline{A_2}$ und $B_1\overline{B_2}$ auf Grund der Konvexität von R links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ nicht mehr ins Innere von R hineingehen, können die Endpunkte jeder ϑ_1 -Nebensehne links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ nur noch auf dem Rande oder innerhalb des Dreiecks A_1B_1Q liegen. Daher ist jede derartige Sehne kürzer als die Sehne A_1B_1 , kann also nach a) keine ϑ_1 -Hauptsehne sein, woraus die Behauptung folgt.

13. Definition: Wir sagen, die Strecke AB konstanter Länge L lässt sich stetig als Sehne eines Ovals R herumführen, wenn von einer beliebigen Anfangslage A_0B_0 mit dem Richtungswinkel ϑ_0

ausgehend [wobei A_0 und B_0 zwei beliebig gewählte Punkte auf R mit dem Abstand L sind und $A(\vartheta_0) = A_0$, $B(\vartheta_0) = B_0$ gesetzt wird] für monoton veränderliches ϑ ($\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 + 2\pi$) es stetige Ortsfunktionen $A(\vartheta)$ und $B(\vartheta)$ gibt derart, dass die Distanz der Punkte $A(\vartheta)$ und $B(\vartheta)$ ständig gleich L ist, die Punkte $A(\vartheta)$ und $B(\vartheta)$ auf R liegen, die Sehne $A(\vartheta)B(\vartheta)$ zum Richtungswinkel ϑ gehört,

$$A(\vartheta_0 + 2\pi) = A(\vartheta_0), \quad B(\vartheta_0 + 2\pi) = B(\vartheta_0)$$

ist und dass für die als stetige Funktionen von ϑ definierten Bogenlängen $s(A)$ und $s(B)$ die Relationen

$$|s[A(\vartheta_0 + 2\pi)] - s[A(\vartheta_0)]| = |s[B(\vartheta_0 + 2\pi)] - s[B(\vartheta_0)]| = U$$

gelten, wo U der Umfang von R ist.

Satz 1: *Damit jede Sehne AB konstanter Länge L sich stetig längs eines Orals R herumführen lässt, ist hinreichend, dass $L < \Delta$ ist und notwendig, dass $L \leq \Delta$ ist¹⁾.*

Beweis. Es sei $L < \Delta$. Der Grundgedanke unseres Beweises dafür, dass jede Sehne der Länge L auf R vollständig herumgeführt werden kann, ist dann der folgende: Wir wollen zeigen, dass jede ϑ -Nebensehne AB ($\vartheta \notin (0, 2\pi)$, $|AB| = L < \Delta$) entweder eine ϑ_- -Sehne ist oder aber, falls AB auf einer Randstrecke von R liegt, durch passende Verschiebungen längs dieser Randstrecke in eine ϑ_+ - und in eine ϑ_- -Sehne übergeführt werden kann (vgl. Nr. 11, p. 226).

14. Wir beweisen zunächst: Jede ϑ -Nebensehne AB , die kein Randstück von R ist, ist eine $\vartheta_{\pm}$ -Sehne.

Eine solche ϑ -Sehne ist nämlich sicher keine Hauptsehne, weil die Länge einer Hauptsehne nach Definition wenigstens $= \Delta$ ist, wir aber nunmehr $L < \Delta$ voraussetzen. Um jede derartige ϑ -Sehne lässt sich daher nach der Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen (p. 227) für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ein (2ε) -Parallelstreifen ($A'B'$, $A''B''$) der Breite 2ε zeichnen derart, dass $\vec{A'B'}$ und $\vec{A''B''}$ auf verschiedenen Seiten von $\vec{AB}$ liegen und von AB den Abstand ε haben und dass

$$|A'B'| < L, \quad |A''B''| > L$$

gilt (vgl. Abb. 5).

Man betrachte zunächst die Diagonale $A''B'$. Ist $|A''B'| \geq L$, so gibt es durch B' eine Sehne der Länge L mit der Richtung $\vartheta' > \vartheta$, da ja $|A'B'| < L$ ist. Ist aber $|A''B'| \leq L$, so gibt es

¹⁾ Auch $L = \Delta$ ist hinreichend. Den Beweis indes, der etwas kompliziert ist, werden wir in dieser Arbeit nicht erbringen.

durch A'' eine Sehne der Länge L mit der Richtung $\vartheta' > \vartheta$, da ja $|A''B''| > L$ ist.

Betrachten wir andererseits die Diagonale $A'B''$, so ergibt sich ganz analog die Existenz einer Sehne der Länge L durch A' oder B'' , die zum Richtungswinkel $\vartheta'' < \vartheta$ gehört.

15. Wir haben nunmehr nur noch den Fall zu betrachten, wo die ϑ -Nebensehne auf einem geradlinigen Randstück von R , sagen wir A_0B_0 , liegt.

a) Es sei zunächst $A_0 = A$, $B_0 = B$ (vgl. Abb. 6) und es sei R rechts von der gerichteten Strecke $\overrightarrow{A_0B_0}$ gelegen angenommen. Wir zeichnen im Abstand ε von AB die zu $\overrightarrow{AB}$ parallele Sehne $A''B''$. Nach der Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen (p. 227) gilt wiederum $|A''B''| > |AB| = L$ (denn wäre $|A''B''| \leq |AB|$, so müsste AB ϑ -Hauptsehne sein, entgegen der Voraussetzung $L < \Delta$).

Ist nun $|AB''| \leq L$, so liegt im Winkelraum $(AB''A')$ mindestens eine ϑ'' -Sehne mit $\vartheta'' < \vartheta$ durch B'' . Ist dagegen $|AB''| \geq L$, so verschieben wir die Sehne AB'' im krummlinigen Viereck $ABB''A'$ parallel zu sich (in der Abb. 6 nach links), bis sie die Länge L erreicht [vgl. Eigenschaft d), p. 227]. Ihr Richtungswinkel ϑ'' ist dann wieder $< \vartheta$, so dass unsere Sehne AB sicher eine ϑ_- -Sehne ist. Aus der Betrachtung von $A''B$ lässt sich durch eine durchaus analoge Überlegung zeigen, dass AB auch ϑ_+ -Sehne ist.

b) Wir nehmen endlich an, dass $|A_0B_0| > L$ ist (vgl. Abb. 7). Der Punkt A' sei auf A_0B_0 so gewählt, dass $|A'B_0| = L$ ist und es sei wiederum R rechts der gerichteten Strecke $\overrightarrow{A_0B_0}$ gelegen angenommen. Lässt man den Endpunkt B_0 von $A'B_0$ längs des in B_0 an A_0B_0 angrenzenden Randstückes von R laufen, so wird der Winkel unserer Sehne offenbar $< \vartheta$, und ebenfalls erhält man, indem man AB in A_0 ansetzt ($|A_0B'| = L$) und sodann A_0 längs des entsprechenden Teilstückes von R laufen lässt, eine ϑ' -Sehne mit $\vartheta' > \vartheta$.

Damit sind alle Möglichkeiten besprochen und die Bedingung $L < \Delta$ als hinreichend erwiesen. Dass aber die Holditchsche Bewegung im Falle $L > \Delta$ unmöglich ist, folgt daraus, dass in der Richtung, die einer Breitensehne (vgl. Nr. 11, p. 226) entspricht, die Länge aller Sehnen $\leq \Delta$ ist.

§ 2. Eindeutigkeit der Holditchschen Bewegung

16. **Satz 2:** *Führen wir auf einem Oval R die Strecke AB konstanter Länge $L < \Delta$ stetig als Sehne herum (vgl. Nr. 13, p. 228)*

und hat R keine geradlinigen Randstücke der Länge $\geq L$, so liegt $\overrightarrow{AB}$ stets rechts oder stets links aller zu $\overrightarrow{AB}$ parallelen Hauptsehnern $\overrightarrow{AB}$, und die Sehnensbewegung ist eindeutig (vgl. Nr. 5, p. 223).

Beweis. Wir führen den Beweis so, indem wir zeigen, dass bei der Holditchschen Bewegung der Sehne AB der Pol P_{AB} stets rechts oder stets links der Sehne $\overrightarrow{AB}$ liegt. Die Behauptung des Satzes 2 folgt dann daraus sofort unter Berücksichtigung der Eigenschaft b) der ϑ -Sehnen (p. 227).

Da wegen $L < \Delta$ der zur Sehne AB gehörige Pol P_{AB} nie im Unendlichen liegt, beschreibt er bei unserer Sehnensbewegung zunächst sicher solange eine stetige Kurve R_P , als die Tangenten a und b sich längs R stetig drehen. Die einzigen Singularitäten, die wir noch zu betrachten haben, sind die Ecken von R .

Wir nehmen für die folgende Überlegung an, dass AB im Sinne monoton wachsender Winkel ϑ auf R herumgeführt werde (für monoton fallende ϑ sind die Verhältnisse ganz analog). Durchläuft nun zum Beispiel der Punkt B eine Ecke von R (vgl. Abb. 8), so zeichnen wir durch B die links- und rechtsseitige Grenzstützgerade b_1 bzw. b_2 . In der Lage AB wird nun b_1 in die Lage b_2 hineingedreht, wobei der Pol P_{AB} die Strecke P_1P_2 beschreibt. Durchlaufen A und B zugleich je eine Ecke von R , so verabreden wir, dass stets vor der Drehung der Stützgeraden a zuerst die Stützgerade b von der einen Grenzlage in die andere übergeführt wird.

Unter diesen Abmachungen ist es also stets möglich, bei unserer Sehnensbewegung eine stetige Kurve R_P zu erzeugen. Andererseits ändern sich auch $s(A)$ und $s(B)$ stetig (vgl. Nr. 13, p. 228 f). Läge nun P_{AB} nicht stets auf derselben Seite der Sehne $\overrightarrow{AB}$, so müsste R_P entweder durch das Unendliche hindurchgehen oder aber eine Sehne AB oder deren Verlängerung schneiden. Der erste Fall widerspricht unserer Voraussetzung $L < \Delta$, der zweite Fall der Voraussetzung, dass R keine geradlinigen Randstücke der Länge $\geq L$ besitzt.

Nach der Eigenschaft d), p. 227, gibt es daher zu jeder Richtung ϑ eine und nur eine ϑ -Sehne der Länge L , das heisst unsere Sehnensbewegung ist eindeutig.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 3. Doppelpunktfreiheit von R_C

17. Wir leiten nun hinreichende Bedingungen für die Doppelpunktfreiheit der Kurve R_C , die ein Punkt C auf AB beim vollständigen Herumführen der Sehne AB auf R beschreibt, her.

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen von Satz 2, p. 230, gilt: Liegt C auf der Verlängerung von AB , so ist R_C doppelpunktfrei.*

Beweis. Wir nehmen an, der Satz sei falsch. Dann muss es zwei Sehnen A_1B_1 und A_2B_2 ($|A_1B_1| = |A_2B_2| = L < \Delta$) geben, die den Doppelpunkt $C_1 = C_2$ der Kurve R_C erzeugen (vgl. Abb. 9).

Die Sehnen $s_1 = A_1A_2$ und $s_2 = B_1B_2$ sind parallel, denn auf A_1C_1 und A_2C_2 sind entsprechende Stücke wegen $|A_1C_1| = |A_2C_2|$ und $|B_1C_1| = |B_2C_2|$ proportional. Die beiden zu s_1 und s_2 parallelen Stützgeraden haben daher auf dem Ovalbogen $\widehat{A_1A_2}$ bzw. $\widehat{B_1B_2}$ je mindestens einen Stützpunkt T_1 bzw. T_2 . Daher liegen die Punkte A_1, B_1 rechts der Hauptsehne $\overrightarrow{T_1T_2}$ derart, dass der Schnittpunkt der Geraden T_1A_1 und T_2B_1 auch rechts von $A_1\vec{B_1}$ liegt. Das Entsprechende gilt für A_2B_2 , so dass die beiden Sehnen $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ nach der Eigenschaft e) der ϑ -Sehnen (p. 228) auf verschiedenen Seiten der zu $A_1\vec{B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A_2B_2}$ parallelen Hauptsehnen liegen, im Widerspruch zu Satz 2, p. 230.

18. **Satz 4:** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2, p. 230, gilt: Liegt C zwischen A und B und gelten die Relationen*

$$L \leq 2r, \quad L < \Delta,$$

wobei r den Radius des grössten Inkreises von R bedeutet, so ist R_C doppelpunktfrei.

Beweis. Wir nehmen wie im Beweise zu Satz 3 an, es gebe im Widerspruch zu unserer Behauptung zwei Lagen der Sehne AB (A_1B_1 und A_2B_2 mit $|A_1B_1| = |A_2B_2| \leq 2r$ und $< \Delta$) mit dem Doppelpunkt $C_1 = C_2$ (vgl. Abb. 10). Nach Satz 2, p. 230, liegen $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ auf derselben Seite der zu $\overrightarrow{A_1B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A_2B_2}$ parallelen Hauptsehnen. Wir nehmen an, dass sie auf der *linken* Seite liegen (im andern Falle sind die folgenden Überlegungen symmetrisch zu übertragen). Nach der Eigenschaft c), p. 227, liegen somit auch die Pole P_1 und P_2 auf der linken Seite von $A_1\vec{B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A_2B_2}$, und zwar wegen $|A_1B_1| = |A_2B_2| < \Delta$ im Endlichen.

Die Sehnen $s_1 = A_1A_2$ und $s_2 = B_1B_2$ sind antiparallel, denn auf A_1B_1 und A_2B_2 sind wegen $|A_1C_1| = |A_2C_2|$ und $|B_1C_1| = |B_2C_2|$ wieder entsprechende Stücke proportional.

Wir teilen jetzt alle Lagemöglichkeiten für einen Mittelpunkt M eines grössten Inkreises von R in fünf Fälle ein. Wir wollen zeigen, dass wir, unter der Annahme der Existenz des Doppelpunktes $C_1 = C_2$, stets einen Widerspruch zu unseren Voraussetzungen $L \leq 2r$, $L < \Delta$ erhalten.

a) M liege auf A_1B_1 . Da jeder Ovalpunkt von M mindestens den Abstand r hat, gilt:

$$|A_1B_1| = |A_1M| + |MB_1| \geq 2r.$$

Wegen unserer Voraussetzung $|A_1B_1| \leq 2r$ kommt nur $|A_1B_1| = 2r$ in Frage, das heisst, M liegt im Mittelpunkt der Sehne A_1B_1 . Da somit A_1B_1 Inkreisdurchmesser ist, müssen die Stützgeraden in A_1 und B_1 von R senkrecht auf A_1B_1 stehen, denn sonst würden sie in den Inkreis und damit in R hineingehen. Daher wäre A_1B_1 Hauptsehne. Die gleiche Überlegung gilt, wenn wir M auf A_2B_2 annehmen.

b) M liege auf der linken Seite von $\overrightarrow{A_1B_1}$. Wir ziehen in Abb. 10 durch M die Parallele p zu A_1B_1 , ihre Schnittpunkte mit zwei Stützgeraden a_1, b_1 durch A_1, B_1 seien A_1', B_1' . Dann gilt

$$2r < |A_1'B_1'| < |A_1B_1| = L,$$

denn die Schnittpunkte von p mit R und somit erst recht die Schnittpunkte von p mit dem Inkreis können nur auf der Verbindungsstrecke $A_1'B_1'$ liegen.

c) Liegt M auf der linken Seite von $\overrightarrow{A_2B_2}$, so ergibt sich analog

$$2r < |A_2'B_2'| < |A_2B_2| = L.$$

d) Liegt M im Innern des Dreiecks $A_2B_1C_1$, so ist in Abb. 10 $|MA_2| \geq r$, $|MB_1| \geq r$, denn jeder Ovalpunkt hat von M mindestens den Abstand r . Daher gilt

$$2r \leq |A_2M| + |MB_1| < |A_2C_1| + |C_1B_1| = L.$$

e) Liegt schliesslich M rechter Hand oder auf $\overrightarrow{A_2B_1}$, so gilt in Abb. 10, wenn wir die Schnittpunkte von s_1 und s_2 mit der Parallelen zu A_2B_1 durch M bzw. mit A^* und B^* bezeichnen:

$$2r \leq |A^*B^*| = |A_2B_1| < |A_2C_1| + |C_1B_1| = L.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

19. Wir können den obigen Satz 4 für den Spezialfall $|AC| = |BC|$ noch anders interpretieren. Schreiben wir nämlich einem Oval irgendein Rechteck ein, so können wir die Bezeichnung der Diagonalenendpunkte A_1, B_1 bzw. A_2, B_2 stets so wählen, dass für $|A_1B_1| = |A_2B_2| < L$ die zugehörigen Pole P_1 und P_2 bzw. auf derselben Seite der Diagonalen $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ liegen. Gälte nun neben $|A_1B_1| = |A_2B_2| < L$ auch noch $|A_1B_1| = |A_2B_2| \leq 2r$, so könnten wir eine Sehne AB der Länge

$|A_1B_1| = |A_2B_2|$ nach den Sätzen 1, (p. 229) und 2 (p. 230) auf R vollständig herumführen derart, dass der Mittelpunkt C^* von AB eine Kurve R_{C^*} beschreibt, die im Diagonalschnittpunkt $C_1 = C_2$ einen Doppelpunkt besitzt. Da dies aber dem obigen Satze 4 widerspricht, ergibt sich:

Satz 5: *Die Länge der Diagonalen aller einem Oval R mit $2r < \Delta$ bzw. mit $2r = \Delta$ einbeschriebenen Rechtecke ist grösser als der Durchmesser eines grössten Inkreises von R bzw. nicht kleiner als die Minimalbreite Δ des Ovals.*

§ 4. Monotonie der Holditschen Bewegung

20. Wir wollen uns nun überlegen, unter welchen Bedingungen die Holditsche Bewegung unserer Sehne AB ($|AB| = -L < \Delta$) auf R im Sinne der Einleitung (Nr. 8, p. 224) monoton ist.

Definitionen: Unter einer *Normalen* von R im Punkte N verstehen wir im folgenden eine Gerade durch N , die auf einer durch N gehenden Stützgeraden von R senkrecht steht. Gelegentlich bezeichnen wir N als den *Fusspunkt der Normalen*.

Unter der *Länge dieser Normalen* verstehen wir die Länge des grössten Normalenstückes, das vollständig innerhalb von R oder auf R liegt.

Die *untere Grenze* der Längen aller Normalen von R bezeichnen wir stets mit N_u .

Satz 6: *Unter den Voraussetzungen von Satz 2, p. 230, und mit den Bezeichnungen von Nr. 13, p. 228f, gilt: Ist $L < N_u$, so sind $s(A)$ und $s(B)$ längs R durchwegs eigentlich monotone Funktionen.*

21. Wir beweisen zuerst den folgenden

Hilfssatz: *Wird die Sehne AB konstanter Länge L mit $L < N_u$ auf R herumgeführt, so sind die Polwinkel (das heisst die Winkel α und β im Poldreieck ABP_{AB} bei A und B) stets spitz.*

Beweis. Beim vollständigen Herumführen wird die Sehne AB ($|AB| = L < N_u$) sicher einmal parallel zu einer Breitensehne $\overline{AB}$ (vgl. Nr. 11, p. 226) sein. Dann sind aber die Winkel α und β auf Grund der Konvexität von R sicher beide spitz (vgl. Abb. 11), denn andernfalls würden die Stützgeraden in A oder B in das Innere von R hineingehen. Wegen $L < N_u$ gilt daher während der ganzen Bewegung $\alpha, \beta < \pi/2$; denn gäbe es eine Sehnenlage, wo einer der beiden Winkel stumpf ist, so müsste AB im Laufe der Bewegung, entgegen der Voraussetzung $L < N_u$, einmal in A oder B auf einer Stützgeraden durch A bzw. B senkrecht stehen. Denn solange R eine sich stetig drehende Tangente be-

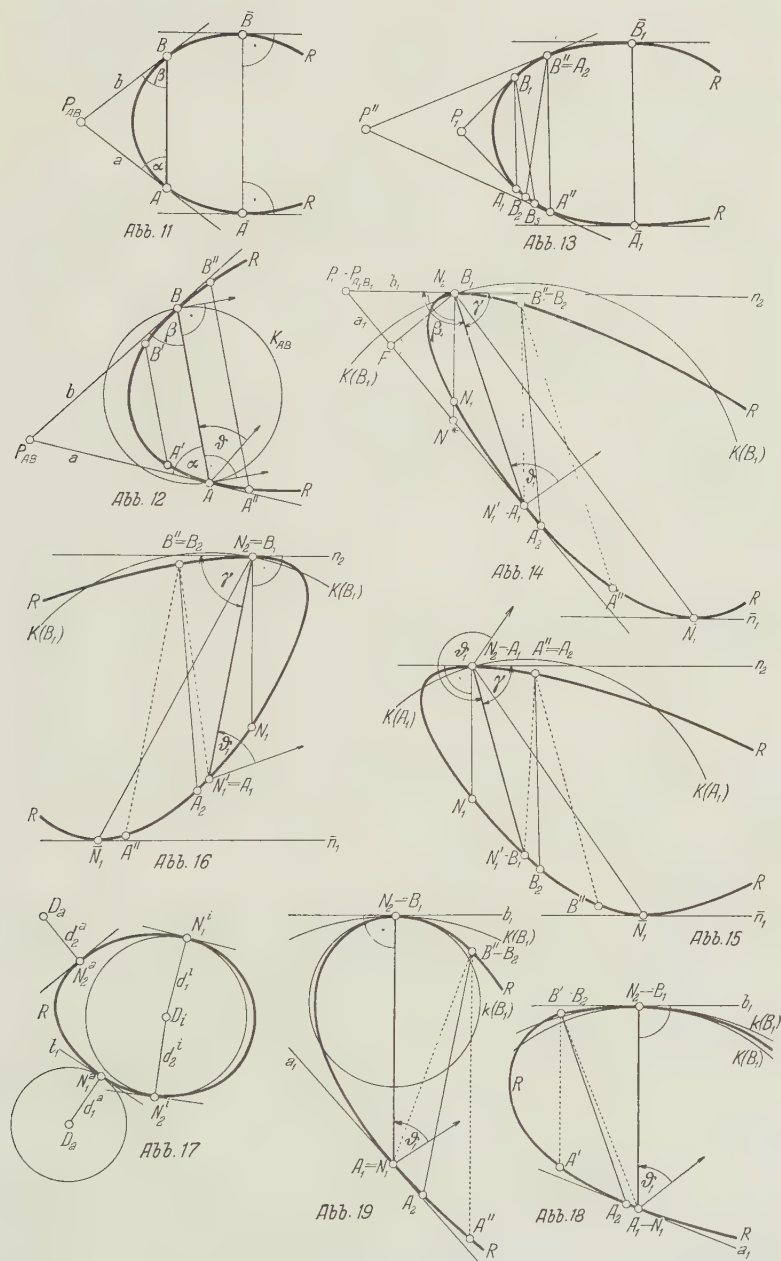


Abb. 11-19.

sitzt, ändern sich α und β ebenfalls stetig. Die einzigen Singularitäten sind die Ecken von R . Ändert aber α oder β in einer Ecke von spitzen zu stumpfen Winkeln, so steht AB senkrecht auf einer Stützgeraden von R durch A bzw. B .

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

22. *Beweis von Satz 6.* Wir zeichnen in Abb. 12 durch A und B ($|AB| = L < N_u$) wieder zwei Stützgeraden a, b und den zugehörigen Pol P_{AB} links von $\vec{A\bar{B}}$. (Im Falle, wo P_{AB} rechts von $\vec{A\bar{B}}$ liegt, sind die Überlegungen ganz symmetrisch). Nach dem Hilfssatze in Nr. 21 sind die Stützwinkel α und β links von $\vec{A\bar{B}}$ beide spitz. Andererseits sind die Stützwinkel bei A und B rechts von $\vec{A\bar{B}}$ beide stumpf, denn andernfalls würde AB entgegen der Voraussetzung $L < N_u$ senkrecht auf einer Stützgeraden von R durch A oder B stehen. Daher gibt es für ein genügend kleines ε (> 0) einen (2ε) -Parallelstreifen $(A'B', A''B'')$ mit $|A'B'| < L$, $|A''B''| > L$ um AB derart (vgl. Nr. 14, p. 229f.), dass R links von $\vec{A\bar{B}}$ in $(A'B', AB)$ innerhalb des Kreises K_{AB} durch A und B mit AB als Durchmesser liegt und dass die Lote auf AB durch A und B rechts von $\vec{A\bar{B}}$ in $(AB, A''B'')$ ins Innere von R zeigen.

Daher ist jede ϑ' - und ϑ'' -Sehne ($\vartheta'' < \vartheta < \vartheta'$) in $(A'B', A''B'')$ rechts von $\vec{A\bar{B}}$ länger, links von $\vec{A\bar{B}}$ aber als ein Teilstück einer Sehne des Kreises K_{AB} kürzer als L . Die Endpunkte jeder zu AB benachbarten Ovalsehne der Länge L in unserem Parallelstreifen müssen somit auf verschiedenen Seiten von $\vec{A\bar{B}}$ liegen, das heisst, die Punkte A und B haben auf R denselben Umlaufsinn.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

23. **Satz 7:** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2, p. 230, und mit den Bezeichnungen von Nr. 13, p. 228f., gilt: Ist $N_u < L < \Delta$, so sind $s(A)$ und $s(B)$ längs R nicht beide durchwegs monoton¹⁾.*

Wir beweisen zuerst den folgenden

Hilfssatz: *Betrachten wir irgendeinen abgeschlossenen Parallelstreifen $(A_1B_1, A''B'')$ zwischen zwei parallelen Nebensehnen A_1B_1 und $A''B''$ mit $|A_1B_1| < |A''B''|$ links (bzw. rechts) der zu ihnen parallelen Hauptschnen $\vec{A_1\bar{B}_1}$, wobei A_1B_1 und $A''B''$*

¹⁾ Der erste Hinweis darauf, dass allgemein beim Normalstehen der Strecke AB auf einer der beiden Führungskurven R_A, R_B (vgl. Nr. 1, p. 221) eine Änderung der Umlaufsinn von B oder A auf R_B bzw. R_A eintreten kann, stammt wahrscheinlich von CAYLEY (1894, p. 392, Nr. 5). Er setzt allerdings voraus, dass R_A und R_B eine sich stetig drehende Tangentenrichtung besitzen. Ferner zieht er den Fall nicht in Betracht, wo $|AB| = L = N_u$ ist (vgl. Satz 9, p. 241).

keine Randstücke von R sind (vgl. Abb. 13), so liegt jede Sehne $\overrightarrow{B''B_2}$, wobei B_2 im Streifen $(A_1B_1, A''B'')$ zwischen A_1 und A'' liegt, auf der rechten (bzw. linken) Seite der zu $\overrightarrow{B''B_2}$ parallelen Hauptsehnen. Dasselbe gilt für jede Sehne durch B_1 , deren zweiter Endpunkt B_3 im Streifen $(A_1B_1, A''B'')$ zwischen A_1 und A'' liegt.

Beweis. Wir nehmen an, dass unser Parallelstreifen wie in Abb. 13 links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ liegt (im Falle, wo er rechts liegt, sind die folgenden Betrachtungen ganz symmetrisch). Nach der Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen, p. 227, liegt dann $\overrightarrow{A_1B_1}$ wegen $|A_1B_1| < |A''B''|$ links von $\overrightarrow{A''B''}$. Je zwei Stützgeraden durch A_1, B_1 und A'', B'' schneiden sich in den Polen P_1 bzw. P'' , und zwar nach der Eigenschaft c), p. 227, links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A''B''}$.

Man nehme nun eine Stützgerade durch B_2 und bestimme den auf der Stützgeraden $B''P''$ liegenden Pol der Sehne $B''B_2$. Er liegt auf der Verbindungsstrecke $P''B''$, weil beim Umlauf von R im negativen Sinne die entsprechende Stützgerade nach rechts dreht.

Da also dieser Pol nicht im Unendlichen und im speziellen rechts von $B''B_2$ liegt, ist $\overrightarrow{B''B_2}$ keine Hauptsehne und liegt nach der Eigenschaft b) der ϑ -Sehnen, p. 227, auf der rechten Seite der zu $\overrightarrow{B''B_2}$ parallelen Hauptsehnen. Für die Sehne B_1B_3 verläuft der Beweis ganz analog.

24. *Beweis zu Satz 7.* Wir zeichnen in den Abb. 14, 15 und 16 irgendeine Normale N_1N_2 von R , die in N_2 auf der Stützgeraden n_2 senkrecht steht und deren Länge der Ungleichung $L > |N_1N_2| \leq N_u$ genügt (N_1N_2 kann auch eine Randstrecke von R sein). Ferner zeichnen wir die zu n_2 parallele Stützgerade $\bar{n}_1$ mit einem Stützpunkt $\bar{N}_1$. Da nun $\bar{N}_1N_2$ nach Konstruktion Hauptsehne ist, gilt $|N_1N_2| \geq L$. Wegen $|N_1N_2| < L < L$ fällt daher N_1 sicher nicht mit $\bar{N}_1$ zusammen.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle $b_1)$ und $b_2)$, je nachdem ob N_1 links oder rechts von $\bar{N}_1N_2$ liegt.

25. *Fall $b_1)$:* N_1 liegt links von $\bar{N}_1N_2$ (Abb. 14 und 15). Wegen $|N_1N_2| < L, |\bar{N}_1N_2| > L$ liegt im Winkelraum $(\bar{N}_1N_2N_1)$ mindestens eine Sehne $N_1'N_2$ der Länge L durch $\bar{N}_2$, die offenbar nicht Randstück von R ist. Da N_1' links von $\bar{N}_1N_2$ und sicher nicht auf der Tangente $\bar{n}_1$ liegt (da ja sonst die Sehne $N_1'N_2$ eine Hauptsehne und ihre Länge $\geq L$ wäre), liegt $\overrightarrow{N_1'N_2}$ nach der

Eigenschaft e) der ϑ -Sehnen, p. 228, *links* der zu $N_1' \vec{N}_2$ parallelen Hauptsehnen.

Führen wir nun unsere Sehne AB der Länge L mit $\Delta > L > N_u$ auf R vollständig herum derart, dass $A\vec{B}$ stets links oder stets rechts der zu $A\vec{B}$ parallelen Hauptsehnen $A\vec{B}$ liegt, so wird AB nach Satz 2, p. 230, genau einmal mit $N_1' \vec{N}_2$ zusammenfallen, und zwar derart, dass im ersten Fall $A_1 = N_1'$ und $B_1 = N_2$ und im andern Fall $A_1 = N_2$ und $B_1 = N_1'$ ist.

26. Zunächst sei $A_1 = N_1'$, $B_1 = N_2$ (vgl. Abb. 14). Wir zeichnen zu $A_1\vec{B}_1$ (Richtungswinkel ϑ_1) im Abstand ε von A_1B_1 die Parallele $A''\vec{B}''$ *rechts* von $A_1\vec{B}_1$ derart, dass $|A''B''| > L$ ist und $A''\vec{B}''$ ebenso wie $A_1\vec{B}_1$ *links* der zu $A_1\vec{B}_1$ parallelen Hauptsehnen liegt [vgl. Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen, p. 227]. Andererseits ist der von n_2 und A_1B_1 gebildete Winkel γ rechts von $A_1\vec{B}_1$ spitz, so dass der Kreis $K(B_1)$ um A_1 durch B_1 (Radius L) rechts von $A_1\vec{B}_1$ durch das Äussere von R geht. Somit gilt $|A_1B''| < L$. Daher liegt im Winkelraum $(A_1B''A'')$ mindestens eine Sehne A_2B_2 der Länge L durch B'' , und zwar gilt $B_2 = B''$, und A_2 liegt im Streifen $(A_1B_1, A''B'')$ zwischen A_1 und A'' . Denn wäre $A_2 = B''$ und läge B_2 zwischen A_1 und A'' im Streifen $(A_1B_1, A''B'')$, so läge $A_2\vec{B}_2$ nach dem Hilfssatze, p. 236 f., *rechts* der zu $A_2\vec{B}_2$ parallelen Hauptsehnen. Da aber $A_1\vec{B}_1$ voraussetzungsgemäss *links* der zu $A_1\vec{B}_1$ parallelen Hauptsehnen liegt, widerspricht dies dem Satze 2, p. 230.

Die Punkte A und B haben daher, wenn die Sehne AB von der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 (oder umgekehrt) übergeführt wird, auf R verschiedene Umlaufsinne.

27. Ist nun $A_1 = N_2$, $B_1 = N_1'$, so sind in Abb. 15 die Überlegungen ganz symmetrisch zu denen von Nr. 26. Hier zeichnen wir zu $A_1\vec{B}_1$ (Richtungswinkel ϑ_1) im Abstand ε von A_1B_1 die Parallele $A''\vec{B}''$ *links* von $A_1\vec{B}_1$ derart, dass $A''\vec{B}''$ ebenso wie $A_1\vec{B}_1$ *rechts* der zu $A_1\vec{B}_1$ parallelen Hauptsehnen liegt. Analog zu Nr. 26 gilt $|A''B''| > L$, $|A''B_1| < L$. Die erste Relation folgt ja wiederum aus der Eigenschaft d), p. 227, die zweite daraus, dass der von A_1B_1 und n_2 gebildete Winkel γ links von $A_1\vec{B}_1$ wiederum spitz ist und deshalb der Kreis $K(A_1)$ um B_1 durch A_1 (Radius L) links von $A_1\vec{B}_1$ durch das Äussere von R geht. Daher liegt im Winkelraum $(B_1A''B'')$ wiederum mindestens eine Sehne A_2B_2 der Länge L durch A'' . Durch die zu Nr. 26 sym-

metrische Betrachtung folgt aus dem Hilfssatze, p. 236 f., $A_2 = A''$. A und B haben daher für $A_1B_1 \rightarrow A_2B_2$ (und umgekehrt) auf R wiederum verschiedene Umlaufsinne.

28. Fall b_2): N_1 liege rechts von $\overrightarrow{N_1N_2}$ (Abb. 16). Da die folgenden Überlegungen ganz analog zu b_1) sind, können wir uns jetzt kürzer fassen. In $(N_1N_2N_1)$ liegt mindestens eine Sehne $N_1'\overrightarrow{N_2}$ der Länge L durch N_2 , die jetzt rechts der zu $N_1'\overrightarrow{N_2}$ parallelen Hauptsehnen liegt. AB fällt nach Satz 2, p. 230, einmal mit $N_1'N_2$ zusammen derart, dass entweder $A_1 = N_1'$ und $B_1 = N_2$ oder $A_1 = N_2$ und $B_1 = N_1'$ ist.

Sei zunächst $A_1 = N_1'$, $B_1 = N_2$ (vgl. Abb. 16). Für die zu A_1B_1 (Richtungswinkel ϑ_1) parallele Sehne $A''\overrightarrow{B''}$ im Abstand ε von $\overrightarrow{A_1B_1}$ links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ und rechts der zu $\overrightarrow{A_1B_1}$ parallelen Hauptsehnen gilt wieder $|A''B''| > L$. Andererseits ist $|A_1B''| < L$. Daher liegt in $(A_1B''A'')$ eine Sehne A_2B_2 der Länge L durch $B'' = B_2$, woraus wiederum die Verschiedenheit der Umlaufsinne folgt.

Ist andererseits $A_1 = N_2$, $B_1 = N_1'$, so sind wiederum die obigen Überlegungen ganz symmetrisch zu übertragen wie früher Nr. 26 auf Nr. 27, womit Satz 7 nun vollständig bewiesen ist.

§ 5. Sätze über stetiggekrümmte Ovale

29. In diesem Paragraphen verlangen wir im allgemeinen, dass sich die Krümmung $1/\rho$ auf R stetig ändert (der grösste Krümmungskreis darf aber in eine Gerade ausarten). In diesem Falle sprechen wir von stetiggekrümmten Ovalen. In einzelnen Fällen verlangen wir auf R stetige und *durchwegs nichtverschwindende* Krümmung (Ovale mit stetig veränderlichem Krümmungskreis).

Wir schicken für das folgende eine Bemerkung über die *Parallelkurven* der stetiggekrümmten Ovale voraus. Tragen wir auf allen Normalen der Kurve R vom Fusspunkt N aus¹⁾ den Abstand d (> 0) ab, so bezeichnen wir die dadurch entstehende Kurve als die innere bzw. äussere d -Parallelkurve R_i bzw. R_a von R , je nachdem d auf diejenige Seite von N abgetragen wird, auf der der Mittelpunkt des Krümmungskreises $k(N)$ von R im Punkte N liegt bzw. nicht liegt (wie aus der Definition zu sehen ist, braucht R_i durchaus nicht im Innern von R zu liegen).

¹⁾ Zur Definition des Fusspunktes N einer Normalen vgl. Nr. 20, p. 234.

30. HJELMSLEV (1926, p. 143ff., insbesondere p. 157, Nr. 17 und 18) hat gezeigt, dass R_a stets stetig gekrümmt ist, während dies für R_i nur dann gilt, wenn d ausserhalb des abgeschlossenen Intervalls $\langle \varrho_m, \varrho_M \rangle$ liegt, wobei ϱ_M bzw. ϱ_m den Radius des absolut grössten bzw. absolut kleinsten Krümmungskreises von R bedeutet (vgl. auch OSTROWSKI, 1951, p. 410, Aufgabe 25). Ferner zeigt HJELMSLEV, dass R_a und R_i stets dasselbe Normalsystem wie R und ein zu R paralleles oder antiparalleles Tangentensystem haben (vgl. OSTROWSKI, 1951, p. 410, Aufgabe 23).

Ist R ein Oval mit stetig veränderlichem Krümmungskreis, so ist R_a stets doppeltpunktfrei, während dies bei R_i für $d > \varrho_M$ oder für $d < \varrho_m$ gilt. (Vgl. OSTROWSKI, 1951, p. 410, Aufgabe 24. Der hier angedeutete Beweis ist bedeutend einfacher als der folgende, wobei man ohne den Kubotaschen Satz auskommt, den wir später beim Beweise des Satzes 11, p. 244, noch einmal brauchen). Gäbe es nämlich (vgl. Abb. 17) in den beiden Stützpunkten N_1^a und N_2^a bzw. N_1^i und N_2^i zwei Normalen d_1^a und d_2^a bzw. d_1^i und d_2^i , die den Doppelpunkt D_a bzw. D_i der Kurve R_a bzw. R_i erzeugen ($|N_1^a D_a| - |N_2^a D_a| = d$ beziehungsweise $|N_1^i D_i| = |N_2^i D_i| - d$), so berührt der Kreis um D_a bzw. D_i mit dem Radius d die Kurve R in den zwei verschiedenen Punkten N_1^a und N_2^a bzw. N_1^i und N_2^i (in Abb. 17 sind die beiden Punkte D_a zu identifizieren).

Die Doppelpunktfreiheit von R_a folgt nun daraus, dass der Kreis um D_a mit dem Radius d durch N_1^a auf der dem Oval R abgewandten Seite der Ovaltangente t_1 durch N_1^a liegt und daher, wie die Tangente t_1 , ausser N_1^a keinen Punkt mit R gemeinsam hat und folglich sicher nicht durch N_2^a hindurchgehen kann.

Die Doppelpunktfreiheit von R_i dagegen ergibt sich, weil die obige Annahme, dass d ausserhalb des Intervalls $\langle \varrho_m, \varrho_M \rangle$ liegt, dem folgenden Satze von KUBOTA (1940, p. 96ff.) widerspricht:

Die Eilinie R besitze überall den Krümmungskreis, der sich entlang der Eilinie R stetig ändert. Der grösste und der kleinste Krümmungskreis der Eilinie R seien bzw. mit ϱ_M, ϱ_m bezeichnet. Konstruiert man nun einen Kreis mit dem Radius d , der diese Eilinie R in mindestens drei verschiedenen oder koinzidenten Punkten schneidet, dann ist

$$\varrho_m \leq d \leq \varrho_M.$$

Dabei ist auch die teilweise Koinzidenz, wie KUBOTA weiter zeigt, im Satze eingeschlossen, das heisst insbesondere gilt die obige Ungleichung auch für einen Kreis, der R in mindestens zwei verschiedenen Punkten berührt.

31. Satz 8: *Die äussere bzw. innere d -Parallelkurve eines stetiggekrümmten Ovals konstanter Breite Δ mit dem absoluten Betrag F des Flächeninhalts ist stets bzw. wenn d ausserhalb des abgeschlossenen Intervalls $\langle \varrho_m, \varrho_M \rangle$ liegt, wieder ein stetiggekrümmtes Oval mit der konstanten Breite $\Delta + 2d$ bzw. $\Delta - 2d$ und dem absoluten Betrag des Flächeninhalts*

$$F_a = F + d(\Delta + d)\pi \quad \text{bzw.} \quad F_i = F - d(\Delta - d)\pi.$$

Beweis. Da die Parallelkurven von R dasselbe Normalensystem wie R und ein zu R paralleles oder antiparalleles Tangentensystem haben (vgl. Nr. 30), und die Kurven konstanter Breite keine geradlinigen Stücke enthalten (vgl. den Beweis von SCHILLING, 1915, p. 73, Satz 4) und somit Ovale mit stetig veränderlichem Krümmungskreis sind, folgt der erste Teil von Satz 8 sofort aus den obigen Betrachtungen über die Parallelkurven in den Nrn. 29 und 30. Die Bemerkung über die Flächeninhalte folgt aus (1'), p. 223, denn die äussere bzw. innere d -Parallelkurve ist identisch mit der Kurve R_C , die der Punkt C der Sehne AB der Länge $|AB| = \Delta$ mit $|BC| = d$, $|AC| = \Delta \pm d$ erzeugt (vgl. Abb. 1a bzw. 1b), wenn AB auf R vollständig herumgeführt wird. Dass dies aber möglich ist, folgt aus der Tatsache, dass hier jede Normale von R zugleich Doppelnormale der Länge Δ ist (vgl. Nr. 8, p. 224).

Für den Spezialfall der stetiggekrümmten Ovale konstanter Breite ergibt sich hier die (in § 1, Satz 1, p. 229, nur für $L < \Delta$ bewiesene) Existenz der Holditchschen Bewegung für $L = \Delta$ unmittelbar.

32. Bei stetiggekrümmten Ovalen können wir die in § 4, r. 20, p. 234, definierte untere Grenze N_u der Längen aller Normalen von R ersetzen durch das *Minimum* N_m der *Normalenlängen*. Hier lässt sich der Satz 6, p. 234, vervollständigen durch den folgenden

Satz 9: *Satz 6 gilt bei stetiggekrümmten Ovalen mit $N_m < \Delta$ auch für $L = N_m$.*

(Dass auch bei stetiggekrümmten Ovalen $N_m < \Delta$ sein kann, zeigen wir am Beispiel der Ellipse, p. 248 f.).

Wir beweisen zuerst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1: *Wird die Sehne AB konstanter Länge L mit $L = N_m (< \Delta)$ auf R herumgeführt, so sind die Polwinkel (vgl. Nr. 21, p. 234, und Abb. 11) nie grösser als $\pi/2$.*

Beweis: Wir nehmen an, $A\vec{B}$ liege stets links der parallelen Hauptsehnen $\vec{AB}$, im andern Falle sind die Überlegungen ganz

symmetrisch. Wäre nun für eine Sehnenlage A_1B_1 ($|A_1B_1| = L$) der Winkel $\beta_1 > \pi/2$ (vgl. Abb. 14), so zeichnen wir durch A_1 und B_1 die Tangenten a_1 und b_1 und den zugehörigen Pol P_1 . Da $\overrightarrow{A_1B_1}$ nach Voraussetzung *links* der zu ihr parallelen Hauptsehnen liegt, liegt nach der Eigenschaft c) der ϑ -Sehnen, p. 227, auch P_1 *links* von $\overrightarrow{A_1B_1}$. Da $\beta_1 > \pi/2$ ist, schneiden die Lote durch B_1 auf b_1 und auf P_1A_1 die Verbindungsstrecke P_1A_1 in N^* bzw. F derart, dass auf $\overrightarrow{A_1P_1}$ die Reihenfolge $A_1N^*FP_1$ gilt. Daher gilt, wenn wir noch den zweiten Schnittpunkt von R mit dem Lot B_1N^* mit N_1 bezeichnen

$$|A_1B_1| > |B_1N^*| \geq |N_1B_1|.$$

Somit hätte die Normale B_1N_1 eine kleinere Länge als A_1B_1 , entgegen der Annahme $L = N_m$. Dasselbe gilt, wenn $\alpha_1 > \pi/2$ ist. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

33. *Hilfssatz 2: Wird die Sehne AB konstanter Länge $|AB| = L$ mit $L = N_m$ ($< \Delta$) auf R herumgeführt, so sind die Umlaufsinne der Punkte A und B auf R sicher so lange gleich, als die Polwinkel (vgl. Nr. 21, p. 234, und Abb. 12) spitz sind.*

Beweis: Wir nehmen wieder an, $\overrightarrow{AB}$ liege stets *links* der parallelen Hauptsehnen $\overrightarrow{AB}$, im andern Falle sind die Überlegungen ganz symmetrisch. Für spitze Polwinkel zeichnen wir nun (vgl. Abb. 12) um AB unsern (2ε) -Parallelstreifen $(A'B', A''B'')$ mit $|A'B'| < L$, $|A''B''| > L$ (vgl. Nr. 14, p. 229) derart, dass R links von $\overrightarrow{AB}$ in $(A'B', AB)$ innerhalb des Kreises K_{AB} durch A und B mit AB als Durchmesser verläuft und dass die Lote auf AB durch A und B rechts von $\overrightarrow{AB}$ in $(AB, A''B'')$ ins Innere von R zeigen. Daraus folgt aber wie im letzten Absatz von Nr. 22, p. 236, die Behauptung.

34. *Beweis von Satz 9:* Da nun für spitze Polwinkel nach Nr. 33 die Umlaufsinne von A und B gleich sind und nach dem Hilfssatz 1 in Nr. 32 für $L = N_m$ keine stumpfen Polwinkel möglich sind, haben wir somit nur noch die Fälle in Betracht zu ziehen, wo einer der beiden Winkel, z. B. β , $= \pi/2$ ist. β kann ferner nicht auf einem nichtpunktförmigen Kurvenstück von R durchwegs $= \pi/2$ sein, denn sonst wäre die Kurve, da sie stetig gekrümmt ist, nach Nr. 29, p. 239, eine stückweise zu sich selbst parallele Kurve mit dem Parallelenabstand $d = |AB|$. Das bedeutete aber, da die Parallelkurven dasselbe Normalsystem wie R und ein zu R paralleles oder antiparalleles Tangentensystem haben (vgl. Nr. 30, p. 240), dass AB stückweise

Doppelnormale von R wäre, entgegen der Voraussetzung $|AB| < \Delta$.

Die Umlaufsinne von A und B könnten sich daher nur in einer isolierten Normalenlage A_1B_1 ändern. Dann müssten aber, da ja nach Nr. 33 für spitze Winkel die Umlaufsinne gleich sind, in der Umgebung von A_1B_1 Sehnen der Länge L existieren, für die $\alpha > \pi/2$ oder $\beta > \pi/2$ ist, im Widerspruch zum Hilfssatz in Nr. 32, p. 241.

Damit ist Satz 9 bewiesen.

35. Satz 10: *In den Fusspunkten der kürzesten Normalen (vgl. Nr. 20, p. 234) eines stetiggekrümmten Ovals R mit $N_m < \Delta$ sind die Krümmungsradien gleich N_m .*

Beweis: N_1N_2 sei eine kürzeste Normale von R mit dem Fusspunkt N_2 ($|N_1N_2| = N_m$, vgl. Abb. 18 und 19). Führen wir eine Sehne AB der Länge $L = N_m$ ($< \Delta$) auf R herum, so wird AB nach Satz 2, p. 230, genau einmal in die Lage N_1N_2 kommen. Wir wählen in den Abb. 18 und 19 $N_1 = A_1$, $N_2 = B_1$ und $\overrightarrow{N_1N_2}$ links der zu $\overrightarrow{N_1N_2}$ parallelen Hauptsehnen [liegt $N_1\overrightarrow{N_2}$ rechts der zu ihr parallelen Hauptsehnen oder ist $N_1 = B_1$, $N_2 = A_1$, so sind die folgenden Überlegungen ganz symmetrisch zu übertragen wie b_1), p. 237, auf b_2), p. 239, bzw. wie Nr. 26, p. 238, auf Nr. 27, p. 238].

Nach Satz 9, p. 241, sind nun die Umlaufsinne von A und B auf R stets dieselben. $\varrho(B_1)$ sei der Radius des Krümmungskreises $k(B_1)$ von R im Punkte B_1 . Wir wollen zeigen, dass die beiden Annahmen $\varrho(B_1) \geq N_m$ je zu einem Widerspruch zur in Satz 9, p. 241, bewiesenen Monotonie der Holditchschen Bewegung der Sehne AB ($|AB| = N_m < \Delta$) führen.

36. *Es sei $\varrho(B_1) > N_m$.* Wir zeichnen im Abstand ε links von $\overrightarrow{A_1B_1}$ (Richtungswinkel ϑ_1) unsere ε -Parallele $A'B'$ zu A_1B_1 mit $|A'B'| < L$ [vgl. Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen, p. 227]. Der Kreis $K(B_1)$ um A_1 mit dem Radius N_m berührt R in B_1 von innen (vgl. Abb. 18). Daher ist $|B'A_1| > L$. Wegen $|A'B'| < L$ liegt daher im Winkelraum $(A'B'A_1)$ mindestens eine Sehne A_2B_2 der Länge L durch B' , und zwar gilt nach dem Hilfssatze, p. 236 f., $B_2 = B'$ [in Abb. 18 sind der Streifen $(A_1B_1, A''B'')$ und die Sehne B_3B_1 der Abb. 13 durch den Streifen $(A'B', A_1B_1)$ bzw. durch die Sehne A_2B_2 zu ersetzen]. Beim Übergang der Sehne AB ($|AB| = L - N_m$) von der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 (oder umgekehrt) haben daher A und B auf R verschiedene Umlaufsinne, im Widerspruch zu Satz 9, p. 241.

37. Es sei $\varrho(B_1) < N_m$. Hier zeichnen wir im Abstand ε (vgl. Abb. 19) rechts von $\overrightarrow{A_1 B_1}$ die ε -Parallele $\overrightarrow{A'' B''}$ zu $\overrightarrow{A_1 B_1}$ mit $|\overrightarrow{A'' B''}| > L$ derart, dass $\overrightarrow{A'' B''}$ ebenso wie $\overrightarrow{A_1 B_1}$ links der zu $\overrightarrow{A_1 B_1}$ parallelen Hauptsehnen liegt [vgl. Eigenschaft d) der ϑ -Sehnen, p. 227]. Der Kreis $K(B_1)$ um A_1 mit dem Radius N_m berührt die Kurve R in B_1 von aussen. Daher ist $|\overrightarrow{A_1 B''}| < L$. Wegen $|\overrightarrow{A'' B''}| > L$ liegt daher im Winkelraum $(A_1 B'' A'')$ mindestens eine Sehne $A_2 B_2$ der Länge L durch B'' . Aus dem Hilfssatze, p. 236 f., folgt wiederum $B_2 = B''$. Somit sind auch hier die Umlaufsinne von A und B auf R für $A_1 B_1 \rightarrow A_2 B_2$ (und umgekehrt) verschieden, im Widerspruch zu Satz 9, p. 241.

Damit ist Satz 10 bewiesen.

Die Krümmungsmittelpunkte in den Fusspunkten der kürzesten Normalen eines stetiggekrümmten Ovals sind also für $N_m < \Delta$ Schnittpunkte des Ovals mit seiner Evolute.

38. Zu den Sätzen 3 und 4 in § 3 wollen wir jetzt für Ovale mit stetig veränderlichem Krümmungskreis noch einen weiteren Fall der Doppelpunktfreiheit der Kurve R_C hinzufügen:

Satz 11: *Führen wir auf einem Oval mit stetig veränderlichem Krümmungskreis und $N_m < \Delta$ die Strecke AB konstanter Länge $|\overrightarrow{AB}| = L \leq N_m$ stetig als Sehne herum (vgl. Nr. 13, p. 228 f.) und liegt eine der Längen $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ (vgl. Nr. 17, p. 231) ausserhalb des abgeschlossenen Intervalls $\langle \varrho_m, \varrho_M \rangle$ (vgl. Nr. 30, p. 240), so ist R_C doppelpunktfrei.*

Beweis: Nach Satz 3, p. 232, ist nur der Fall zu betrachten, wo C zwischen A und B liegt. Wir nehmen an, es gäbe im Widerspruch zu unserer Behauptung zwei Lagen der Sehne AB ($A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ mit $|\overrightarrow{A_1 B_1}| = |\overrightarrow{A_2 B_2}| \leq N_m$) mit dem Doppelpunkt $C_1 = C_2$ (vgl. Abb. 20). Nach Satz 2, p. 230, liegen $\overrightarrow{A_1 B_1}$ und $\overrightarrow{A_2 B_2}$ auf derselben Seite der zu $\overrightarrow{A_1 B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A_2 B_2}$ parallelen Hauptsehnen. Wir nehmen in Abb. 20 an, dass sie auf der *linken* Seite liegen, im andern Falle sind die folgenden Überlegungen symmetrisch zu übertragen. Nach der Eigenschaft c) der ϑ -Sehnen, p. 227, liegen somit auch die Pole P_1 und P_2 auf der *linken* Seite von $\overrightarrow{A_1 B_1}$ bzw. $\overrightarrow{A_2 B_2}$, und zwar wegen $L < \Delta$ im Endlichen.

Die Polwinkel α_1, β_1 und α_2, β_2 der beiden Sehnen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sind nach dem Hilfssatze in Nr. 21, p. 234., und nach dem Hilfssatze 1 in Nr. 32, p. 241, nicht grösser als $\pi/2$. Daher trifft R den Kreisbogen $\widehat{A_2 A_1}$ um $C_1 = C_2$ in mindestens einem weiteren Punkte A^* (der nicht mit A_1 oder A_2 zusammenfällt), oder aber

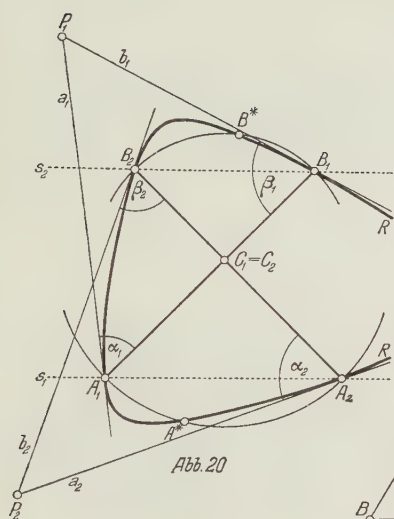


Abb. 20

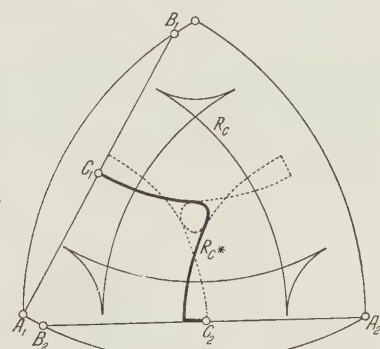


Abb. 24

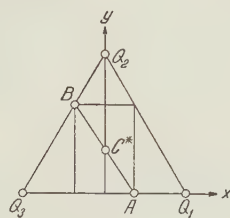


Abb. 22

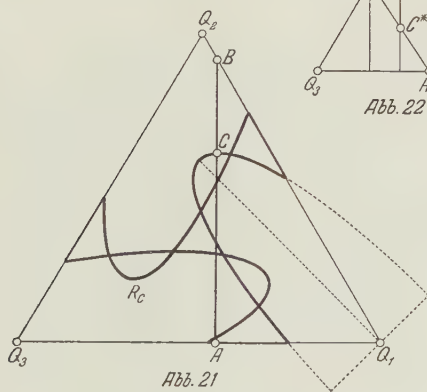


Abb. 21

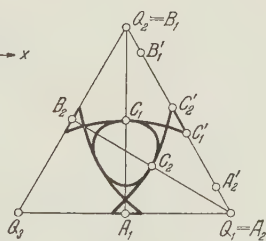


Abb. 23

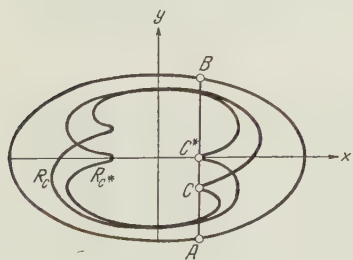


Abb. 25

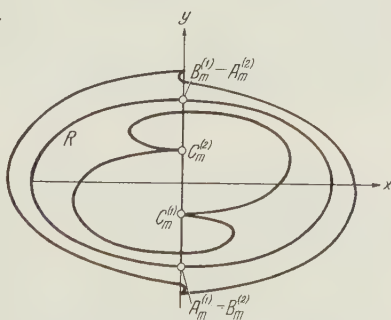


Abb. 26

Abb. 20-26.

mindestens einer der beiden Punkte A_1, A_2 ist ein Berührungspunkt von R und dem Kreisbogen $\widehat{A_2 A_1}$. Die analogen Überlegungen gelten für den Kreisbogen $\widehat{B_2 B_1}$. Unter der obigen Annahme, dass eine der Längen $|AC|, |BC|$ ausserhalb des abgeschlossenen Intervalls $\langle \varrho_m, \varrho_M \rangle$ liegt, widerspricht dies aber dem auf p. 240 zitierten Satze von KUBOTA, womit Satz 11 bewiesen ist.

§ 6. Beispiele zur Holditchschen Bewegung

a) Das gleichseitige Dreieck

Nehmen wir als Führungskurve R ein gleichseitiges Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$, so besteht R_C im allgemeinen aus drei Geradenstücken und drei Ellipsenbogen. In Abb. 21 hat R_C sechs getrennte Doppelpunkte. (Für die Konstruktion der Richtungen und Längen der Achsen vgl. man HJELMSLEV, 1914, p. 167, Nr. 192, wo die Führungskurven von A und B aus zwei sich schneidenden Geraden bestehen.)

39. Wir wollen hier die Bedingung für die Doppelpunktfreiheit der Kurve R_{C^*} untersuchen, die der Mittelpunkt C^* der Sehne AB beschreibt. Da im Falle eines Doppelpunktes $C_1 = C_2$ die Endpunkte A_1, B_1 und A_2, B_2 der beiden den Doppelpunkt erzeugenden Sehnen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ ein Rechteck bilden, wollen wir, um eine hinreichende Bedingung für die Doppelpunktfreiheit von R_{C^*} zu erhalten, das Minimum L_m der Längen der Diagonalen aller dem Dreieck einbeschriebenen Rechtecke bestimmen. Wir legen (vgl. Abb. 22) die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems längs $Q_3 Q_1$, die y -Achse gehe durch Q_2 . Die Koordinaten von A und B seien $(x_1, 0)$ bzw. $(-x_1, y_2)$. Dann ist, $|AB| = L$, $|Q_1 Q_2| = a$ gesetzt:

$$L^2 = 4 x_1^2 + y_2^2, \quad y_2 = \sqrt{3} \left(-x_1 + \frac{a}{2} \right),$$

$$L^2 = 7 x_1^2 - 3 a x_1 + \frac{3}{4} a^2.$$

Setzen wir hiervon die erste Ableitung nach x_1 gleich Null, so erhalten wir

$$14 x_1 - 3 a = 0, \quad x_1 = \frac{3}{14} a, \quad \frac{d}{dx_1^2} L^2 = 14 > 0.$$

Die Seiten und die Diagonalen des Rechtecks mit der verlangten Minimaleigenschaft sind somit

$$\frac{3}{7} a, \quad \frac{2a}{7} \sqrt{3}, \quad L_m = a \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ist also $|AB| < a\sqrt{3}/7$, so ist R_{C^*} doppeltpunktfrei (dieser Wert ist grösser als der Inkreisdurchmesser $2r = a\sqrt{3}/3$, vgl. Satz 4, p. 232).

40. Die Minimalbreite Δ ist gleich der Länge der Höhen des Dreiecks. Eine Sehne AB mit $|AB| = \Delta$ lässt sich auf verschiedene Arten auf dem Dreieck herumführen (vgl. hierzu Satz 1, p. 229). Ausgehend von der Höhe A_1B_1 (vgl. Abb. 23) kann AB auf zwei Arten in die Höhe A_2B_2 übergeführt werden mit $\int d\vartheta < \pi$:

1. $B_1 \rightarrow B_2$ auf Q_2Q_3 , $A_1 \rightarrow A_2$ auf Q_3Q_1 .
2. a) $A_1 \rightarrow A_2$ auf Q_3Q_1 , $B_1 \rightarrow B_1'$ auf Q_2Q_1 ($|A_2B_1'| = \Delta$),
 b) $A_2 \rightarrow A_2'$ auf Q_1Q_2 , $B_1' \rightarrow B_1$ auf Q_1Q_2 ($|A_2'B_1| = \Delta$),
 c) $A_2' \rightarrow A_2$ auf Q_2Q_1 , $B_1 \rightarrow B_2$ auf Q_2Q_3 .

Im ersten Fall beschreibt der Mittelpunkt C^* der Sehne AB den Ellipsenbogen C_1C_2 , im zweiten Fall die Kurve $C_1C_1'C_2'C_2$ (zwei Ellipsenbogen und ein Geradenstück).

Führt man AB ($|AB| = \Delta$) vollständig herum derart, dass $\overrightarrow{AB}$ (ausser in der Lage der drei Höhen) stets auf derselben Seite der zu $\overrightarrow{AB}$ parallelen Hauptsehne liegt, so kommen alternierend beide oben beschriebenen Herumführungsarten vor, und C^* beschreibt abwechselungsweise die einzelnen Stücke beider in Abb. 23 gezeichneten Kurven.

Führen wir aber AB ($|AB| = \Delta$) nur nach der ersten Art vollständig auf R herum, so wechselt unsere Sehne $\overrightarrow{AB}$ beim Überschreiten der drei Höhen des Dreiecks ihre Lage in bezug auf die zu ihr parallele Hauptsehne. Hier beschreibt C^* zweimal die innere Kurve R_{C^*} (vgl. Abb. 23), und die Bewegung ist durchwegs monoton, das heisst die Punkte A und B haben auf dem Dreieck stets denselben Umlaufsinn. Für $|AB| < \Delta$ dagegen ist die Bewegung, wie man zum Beispiel aus Abb. 21 sofort sieht, nie monoton (vgl. hierzu Satz 6, p. 234, und Satz 7, p. 236).

b) Das Reuleauxsche Kreisbogendreieck

41. In Abb. 24 ist neben einer allgemeinen Kurve R_C für $|AB| = \Delta$ noch eine Kurve R_{C^*} gezeichnet, die der Mittelpunkt C^* einer Sehne AB mit $2r < |AB| = L < \Delta = N_u$ beschreibt. R_C hat drei, R_{C^*} sechs Doppelpunkte. Das stärker ausgezogene Teilstück der Kurve R_{C^*} entsteht beim ersten Drittel der Bewegung:

$$A_1 \rightarrow A_2 \text{ (Kreisbogen } \overset{\curvearrowright}{A_1A_2}), \quad B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow B_2.$$

c) Die Ellipse

42. Hier ist die Kurve R_C , da für die Ellipse $2r = A$ gilt, nach Satz 4, p. 232, für $|AB| = L < A$ stets doppelpunktfrei. In Abb. 25 ist eine derartige Kurve gezeichnet, wobei die Sehne $A\tilde{B}$ ($|AB| = L < A$) stets rechts der zu ihr parallelen Hauptsehne liegt.

43. Wir wollen das Minimum N_m der Normalenlängen (vgl. Nr. 20, p. 234) bestimmen. Wir nehmen dazu die Ellipsengleichung in der Form

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (a > b)$$

an. $Q_1(x_1, y_1)$ $Q_2(x_2, y_2)$ sei eine Ellipsennormale in Q_1 mit dem zweiten Schnittpunkt Q_2 mit der Ellipse. Ihre Gleichung ist

$$y - y_1 = \frac{a}{b x_1} \sqrt{a^2 - x_1^2} (x - x_1). \quad (n)$$

Für die Abszisse x_2 des zweiten Schnittpunktes von (n) mit der Ellipse liefert die Rechnung

$$x_2 = \frac{x_1^3 (a^4 + b^4 - 2 a^2 b^2) - x_1 (a^6 - 2 a^4 b^2)}{x_1^2 (a^4 - b^4) - a^6}, \quad (2)$$

wobei unter Berücksichtigung der Ellipsengleichung

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

gesetzt wurde.

In $N^2 = |Q_1 Q_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ drücken wir nun x_2, y_1 und y_2 mit Hilfe der Ellipsengleichung und der Gleichung (2) als Funktionen von x_1 aus. Hieraus ergibt sich:

$$N = 2b \frac{[a^4 - x_1^2 (a^2 - b^2)]^{3/2}}{a^6 - x_1^2 (a^4 - b^4)} \quad (-a \leq x_1 \leq +a; a > b). \quad (3)$$

Die Werte $x_1 = \pm a$ liefern das absolute Maximum $2a$ der Normalenlängen. Um das absolute Minimum zu finden, differenzieren wir (3) nach x_1 :

$$N' = 2b x_1 (a^2 - b^2) \frac{[a^4 - (a^2 - b^2) x_1^2]^{1/2}}{[a^6 - (a^4 - b^4) x_1^2]^2} \\ \times [(a^4 - b^4) x_1^2 - a^6 + 2 a^4 b^2].$$

Dieser Ausdruck verschwindet für

$$x_1^{(1)} = 0, \quad x_1^{(2)} = a^2 \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^4 - b^4}}. \quad (4)$$

44. Für $a < b \sqrt{2}$ ist nur $x_1^{(1)}$ reell. Für $a \leq b \sqrt{2}$ ist also die Doppelnormale der Länge $A = 2b$ die kürzeste Normale (kleine Ellipsenachse).

Für $a > b \sqrt{2}$ setzen wir den Wert für $x_1^{(2)}$ aus (4) in (3) ein und erhalten

$$N_m = 3 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{3}{a^2 + b^2}} \quad (a > b \sqrt{2}) .$$

Dass dies wirklich das Minimum der Normalenlängen ist, ersehen wir daraus, dass der Ausdruck rechts für $a > b \sqrt{2}$ kleiner ist als $2b (= \Delta = 2r)$ und daraus, dass N' nur an den in (4) angegebenen Stellen verschwindet. Wegen $N_m < \Delta$ ist der Krümmungsradius unserer Ellipse ($a > b \sqrt{2}$) bei $\pm x_1^{(2)}$ nach Satz 10, p. 243, gleich N_m . Die Krümmungsmittelpunkte an diesen vier Stellen sind die Schnittpunkte der Ellipse ($a > b \sqrt{2}$) mit ihrer Evolute. Für die Abszissen dieser Schnittpunkte ergibt sich, indem wir den Wert für $x_1^{(2)}$ aus (4) in (2) einsetzen:

$$x_2^{(2)} = \pm a^2 (a^2 - b^2) \sqrt{\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^4 - b^4}\right)^3} .$$

45. Ist die Führungskurve der Punkte A und B von der Ordnung m , so ist nach ROBERTS (1871, p. 286ff., insbesondere p. 291, Nr. 7, und p. 294, Nr. 11) $2m^2$ im allgemeinen die Ordnung der Kurve R_C . Liegt aber C im Mittelpunkt der Strecke AB , so hat R_{C^*} die Ordnung m^2 . In unserem Falle ist also R_C im allgemeinen von der achten Ordnung, während der Mittelpunkt C^* von AB eine Kurve R_{C^*} der Ordnung vier beschreibt.

Für die Kurve R_{C^*} (in Abb. 25 haben wir neben einer allgemeinen Kurve R_C noch eine derartige Kurve R_{C^*} mit $L < \Delta$ eingezeichnet) gelingt es leicht, eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Konvexität anzugeben. R_{C^*} hat

$$|AC| = |BC| = \frac{L}{2} = p$$

gesetzt, nach DINGELDEY (1885, p. 13ff.) die Gleichung:

$$(b^4 x^2 + a^4 y^2) (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) + p^2 a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) = 0 .$$

Ferner hat DINGELDEY gezeigt, dass R_{C^*} im Ursprung den einzigen Doppelpunkt besitzt, der aber für $|AB| = L < \Delta$ isoliert ist, und vier reelle Doppeltangenten hat, die zur y -Achse parallel sind. Die Abstände dieser Doppeltangenten von der y -Achse sind

$$\pm \frac{a}{e} (a + p) \text{ bzw. } \pm \frac{a}{e} (a - p), \quad (e = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad a > b) .$$

Die beiden ersten Doppeltangenten sind stets isoliert, die beiden andern, wie man durch Rechnung sofort sieht, nur für $p < b^2/a$.

Ist nun w die Anzahl der reellen Wendepunkte, t die Anzahl der reellen isolierten Doppeltangenten, n die Ordnung der Kurve R_C , so gilt, wie KLEIN (1876, p. 199) allgemein für Kurven, die keine anderen mehrfachen Punkte als isolierte Doppelpunkte besitzen, gezeigt hat:

$$w + 2t = n(n - 2).$$

Ist also die Länge $L = 2p$ der Sehne AB kleiner als der Durchmesser $2b^2/a$ des kleinsten Krümmungskreises der Ellipse, so ist R_C konvex. Auch $L = 2b^2/a$ liefert eine konvexe Kurve, die an den Stellen $x_{1,2} = \pm(a/e)(a - p)$, $p = b^2/a$ mit der Tangente einen vierfach zu zählenden Punkt gemeinsam hat (Flachpunkt).

46. Schliesslich betrachten wir noch den Fall $L = A$. Die Sehne $\overleftrightarrow{AB}$ der Länge A kann in der Lage der kleinen Ellipsenachse $\overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}}$ (Richtungswinkel ϑ_0) und $\overleftrightarrow{A_m^{(2)} B_m^{(2)}}$ (Richtungswinkel $\vartheta_0 + \pi$) ($A_m^{(1)} = B_m^{(2)}$, $B_m^{(1)} = A_m^{(2)}$) ihre Lage in bezug auf die parallele Hauptsehne nach Belieben beibehalten oder wechseln. In Abb. 26 sind eine innere und eine äussere Kurve R_C gezeichnet, das heisst C liegt bei der ersten zwischen A und B (wir haben $|AC| < |BC|$ gewählt), bei der zweiten auf der Verlängerung von AB über B hinaus, wobei unsere Sehne $\overleftrightarrow{AB}$ von der Lage $\overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}}$ aus im Sinne eigentlich monoton wachsender Winkel ϑ derart herumgeführt wird, dass sie (ausser in der Lage der kleinen Ellipsenachse $\overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}}$ und $\overleftrightarrow{A_m^{(2)} B_m^{(2)}}$) stets *rechts* der zu ihr parallelen Hauptsehne liegt.

Führen wir nun aber unsere Sehne $\overleftrightarrow{AB}$ der Länge $L = A$ von der Lage $\overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}}$ ausgehend derart herum, dass sie bei der ersten Hälfte der Bewegung ($\overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}} \rightarrow \overleftrightarrow{A_m^{(2)} B_m^{(2)}}$, $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + \pi$) stets *rechts*, bei der zweiten Hälfte dagegen ($\overleftrightarrow{A_m^{(2)} B_m^{(2)}} \rightarrow \overleftrightarrow{A_m^{(1)} B_m^{(1)}}$, $\vartheta_0 + \pi \rightarrow \vartheta_0 + 2\pi$) stets *links* der zu ihr parallelen Hauptsehne liegt, so besteht zum Beispiel die innere Kurve bei den in Abb. 26 gewählten Verhältnissen aus dem Kurvenbogen $\overrightarrow{C_m^{(1)} C_m^{(2)}}$ und aus dem Kurvenbogen, den man durch Spiegelung von $\overrightarrow{C_m^{(2)} C_m^{(1)}}$ an der x -Achse erhält. R_C hat in diesem Falle auf der y -Achse einen Doppelpunkt.

47. Ist $|AC| = |BC|$, $|AB| = A$, so fallen die beiden Punkte $C_m^{(1)}$ und $C_m^{(2)}$ in den Nullpunkt (vgl. Abb. 26). Die in Nr. 46 betrachteten Kurvenbogen $\overrightarrow{C_m^{(1)} C_m^{(2)}}$ und $\overrightarrow{C_m^{(2)} C_m^{(1)}}$ werden hier zu zwei geschlossenen, zur x -Achse symmetrischen Kurven, die durch

den Nullpunkt gehen und im übrigen vollständig oberhalb bzw. unterhalb der x -Achse liegen.

Wird nun unsere Sehne AB der Länge $L = A$ von $A_m^{(1)}B_m^{(1)}$ ausgehend zum Beispiel derart auf R herumgeführt, dass ϑ eigentlich monoton wächst und $A\tilde{B}$ stets *rechts* der zu ihr parallelen Hauptsehne liegt, so besteht R_{C^*} aus beiden Kurven, und zwar wird für $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + \pi$ die obere und für $\vartheta_0 + \pi \rightarrow \vartheta_0 + 2\pi$ die untere Kurve beschrieben.

Wechselt dagegen $A\tilde{B}$ nach der ersten Hälfte der Bewegung ihre Lage in bezug auf die zu ihr parallele Hauptsehne, so wird nur eine dieser beiden Kurven beschrieben, dafür aber doppelt. So wird zum Beispiel die obere Kurve doppelt beschrieben, wenn die Sehne $A\tilde{B}$ von $A_m^{(1)}B_m^{(1)}$ ausgehend so herumgeführt wird, dass sie für $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + \pi$ stets *rechts* und für $\vartheta_0 + \pi \rightarrow \vartheta_0 + 2\pi$ stets *links* der zu ihr parallelen Hauptsehne liegt. Entsprechend kann auch die untere Kurve doppelt beschrieben werden.

d) Die Parabel

48. Hier ist R_C ein ungeschlossener, doppelpunktfreier Kurvenbogen, denn ist $|AB| = L$ vorgegeben, so können wir den Parabelbogen stets derart zu einem Oval ergänzen, dass $L < 2r < A$ gilt. R_C ist dann nach Satz 4, p. 232, doppelpunktfrei.

Auch hier ist es leicht, eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Konvexität von R_{C^*} zu finden. Nehmen wir die Parabelgleichung in der Form $y^2 = 2mx$ an, so hat R_{C^*} (C^* ist wieder der Mittelpunkt unserer Sehne AB), $|AC| = |BC| = p$ gesetzt, die Gleichung

$$y^4 - 2mx(y^2 + m^2) + m^2y^2 + m^2p^2 = 0$$

(vgl. DINGELDEY, 1885, p. 15).

Wir lösen nach x auf

$$x = \frac{y^2}{2m} + \frac{m^2p^2}{2(y^2 + m^2)} \quad (5)$$

und differenzieren zweimal nach y :

$$x' = \frac{y}{m} - \frac{m^2p^2y}{(y^2 + m^2)^2}, \quad x'' = \frac{1}{m} - m^2p^2 \frac{m^2 - 3y^2}{(y^2 + m^2)^3}.$$

Setzen wir $x'' = 0$, so erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$y^6 + 3m^2y^4 + 3m^2(m^2 + p^2)y^2 + m^4(m^2 - p^2) = 0.$$

Diese Gleichung hat nur dann eine reelle Nullstelle, wenn $|m| \leq p$ ist. Andererseits ist die Bedingung $p \leq |m|$ für die Konvexität von R_C^* notwendig, wie man aus der Betrachtung der dritten und vierten Ableitung von (5) nach y ersieht. Für $p = |m|$ hat R_C^* bei $y = 0$ einen Flachpunkt. Ist also die Länge $L (= 2p)$ der Sehne AB nicht grösser als der Durchmesser $2m$ des kleinsten Krümmungskreises der Parabel, so ist R_C^* konvex.

Die kürzeste Normale hat den Fusspunkt $N(m, \pm m \sqrt{2})$ und die Länge $N_m = 3 \sqrt{3} m$ (vgl. DINGELDEY, 1930, p. 124). Nach Satz 10, p. 243, ist N_m zugleich der Radius des Krümmungskreises der Parabel im Punkte N .

LITERATURVERZEICHNIS

- BLASCHKE, W. (1914): *Über den grössten Kreis in einer konvexen Punktmenge*, Jber. dtsh. Math. Ver. 23.
- BONNESEN, T., & FENCHEL, W. (1934): *Theorie der konvexen Körper*, Ergebn. Math. Grenzgeb. 3, Heft 1 (Berlin).
- CAYLEY, A. (1894): *On the Kinematics of a Plane*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 15.
- DINGELDEY, F. (1885): *Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen*, Inauguraldissertation (Leipzig).
- (1930): *Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung*, erster Teil, 3. Aufl. (Leipzig und Berlin).
- GOURSAT, E. (1910): *Cours d'analyse mathématique*, Bd. 1, 2. Aufl. (Paris).
- HJELMSLEV, J. (1926): *Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie*, Acta math. 47.
- (1914): *Darstellende Geometrie* (Leipzig).
- HOLDITCH, H. (1858): *Lady's and Gentlemen's Diary for the Year 1858*.
- KEMPE, A. B. (1878): *Mess. math.* [2] 7.
- KLEIN, F. (1876): *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve*, Math. Ann. 10.
- KUBOTA, T. (1940): *Ein Satz über Eilinen*, Tôhoku Math. J. 47.
- OSTROWSKI, A. (1951): *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2 (Basel).
- ROBERTS, S. (1871): *On the Motion of a Plane under certain Conditions*, Proc. London Math. Soc. 3.
- SCHILLING, F. (1915): *Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite*, Z. Math. Phys. 63.
- WILLIAMSON, B. (1877): *An elementary treatise in the integral calculus* (London).
- WOOLHOUSE, W. S. B. (1858): *Lady's and Gentlemen's Diary for the Year 1858*.
- ZINDLER, K. (1920): *Über konvexe Gebilde*, Mh. Math. Phys. 30 (Wien).

Manuskript eingegangen 3. April 1952.

Curriculum vitae

Am 3. Oktober 1924 wurde ich, Rudolf Thüring von Basel und Ettingen (Baselland), als Sohn des Albin Thüring, Bahnbeamter, wohnhaft in Basel, und der Martha geb. Veltin, in Basel geboren. Nach dem vierjährigen Besuch der Knabenrealschule in Basel trat ich im Frühling 1939 in die vierte Klasse des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasiums ein. Nach der Ablegung der Maturprüfung (Typus C) im Frühling 1944 an diesem Gymnasium bezog ich die hiesige Universität, um Mathematik als Hauptfach, theoretische Physik, Experimentalphysik und Chemie als Nebenfächer zu studieren.

Bei den folgenden Herren Professoren und Privatdozenten habe ich Vorlesungen und Übungen besucht: E. BALDINGER, E. BATSCHLET, P. BUCHNER, H. ERLIENMEYER, M. FIERZ, R. FLATT, J. FLECKENSTEIN, P. HUBER, E. MIESCHER, H. MOHLER, R. NEVANLINNA, A. OSTROWSKI, E. SCHUBARTH, A. SPEISER, O. SPIESS, E. VON DER PAHLEN, H. ZICKENDRAHT.

1946/47 arbeitete ich als Assistent bei Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI. Im Frühling 1951 erhielt ich nach einjährigem Besuch des Seminarkurses am kantonalen Lehrerseminar Basel das Mittellehrerdiplom. Seither bin ich an verschiedenen Basler Schulen als Lehrvikar tätig.

Allen meinen Lehrern bin ich zu grossem Dank verpflichtet, insbesondere Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI, unter dessen Anleitung meine Dissertation entstanden ist. Seine vielen wertvollen Ratschläge haben meine Arbeit stark gefördert.
